Синтакса предикатске логике

$\mathcal{L}$ – језик пред. логике

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup R \cup F \cup C$

$\mathcal{L}_0 = \{v_0, v_1, \dots\} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\} \cup \{\forall x : x \in V\}$

$\cup \{\exists x : x \in V\} \cup \{=\} \cup \{(,), ,\}$

R – скуп симбола релација

F – скуп симбола операција

C – скуп симбола константи

Терми и формуле пред. логике

терми $\xrightarrow[\text{индуктивно}]{}$ ① $v_0, v_1, \dots$ – терми

$c \in C$ – терм

② $t_1, \dots, t_k$ – терми

$f(t_1, \dots, t_k)$ – терми

формуле $\xrightarrow[\text{индукт.}]{}$ ① t_1, t_2 – терми $\rightarrow (t_1 = t_2)$ фла

② $t_1, \dots, t_n$ – терми $\rightarrow r(t_1, \dots, t_n)$ фла

③ A, B – фле $\longrightarrow (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), \neg A$ фле

④ A – формула $\quad \forall x A$ – формула

$\exists x A$ – формула

Семантика пред. логике

Интерпретација језика $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup R \cup F \cup C$ на непразном скупу M је пресликавање

$$I : R \cup F \cup C \longrightarrow Rel(M) \cup Fun(M) \cup M$$

$r \in R \longrightarrow I(r)$ - релација на M

$f \in F \longrightarrow I(f)$ - операција на f

$c \in C \longrightarrow I(c)$ - константа (елемент) из M

- интерпретација језика $\mathcal{L}$ на M одређује структуру $\mathbb{M} = (M, I(R), I(F), I(C))$ - модел језика $\mathcal{L}$

Валуација и вриједност терма

$\mathbb{M} = (M, I(R), I(F), I(C))$ - модел језика $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup R \cup F \cup C$

<u>деф</u> Валуација индивидуалних симбола у моделу $\mathbb{M}$ је низ $(a_0, a_1, \ldots) = a$ ел. скупа M

M^N - скуп свих валуација модела $\mathbb{M}$

③

$[t]_a^M$ – вриједност терма t за валуацију a у моделу M дефинишемо индуктивно

① $[v_n]_a^M = a_n \quad v_n \in V$

② $[c]_a^M = c_M$

③ $[f(t_1, \dots, t_k)]_a^M = f_M([t_1]_a^M, \dots, [t_k]_a^M)$

$\boxed{\begin{array}{l} \circledast \ a\text{-валуација} \quad a = (a_0, a_1, \dots, \dots) \\ a(x/b) - \text{за} \quad x = v_k \\ a(v_k/b) = (a_0, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots) \end{array}}$

A – формула језика $\mathcal{L}$

$M \models_a A$ – формула A је истинита у моделу A за валуацију a

Релацију истинитости $M \models_a A$ дефинишемо индуктивно по слож. формуле

① $M \models_a (t_1 = t_2) \iff [t_1]_M^a = [t_2]_M^a$

② $M \models_a r(t_1, t_2, \dots, t_n) \iff ([t_1]_a^M, \dots, [t_n]_a^M) \in r_M$

(3) $M \models_a A \wedge B \iff M \models_a A$ и $M \models_a B$

(4) $M \models_a A \vee B \iff M \models_a A$ или $M \models_a B$

(5) $M \models_a A \rightarrow B \iff M \models_a A$ импликира $M \models_a B$

(6) $M \models_a \neg A \iff$ није $M \models_a A$

(7) $M \models_a \exists x A \iff$ за неко b $M \models_{a(x|b)} A$

(8) $M \models_a \forall x A \iff$ за свако b $M \models_{a(x|b)} A$

$\boxed{M \models A}$ – п.ф. A је истинита у моделу M ако $M \models_a A$ за сваку валуацију $a \in M^N$ (M је модел за A),

$\models A$, фла A је ваљана (логички закон) ако $M \models A$ за сваки модел језика $\mathcal{L}$

5

① Доказати да су формуле ваљане

ⓐ $\neg(\forall x)A(x) \longleftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$

Д) Нека је M произвољна модел језика (језика дате формуле) и a произвољна валуација, ~~тада~~ тд

$$M \models_a \neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow \text{није } M \models_a (\forall x)A(x)$$

$\Leftrightarrow$ није (за свако $b \in M$ $M \models_{a(x/b)} A(x)$)

$\Leftrightarrow$ $\exists b \in M$ тако да није $M \models_{a(x/b)} A(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists b \in M$ тако да $M \models_{a(x/b)} \neg A(x)$

$\Leftrightarrow$ $M \models_a (\exists x)\neg A(x)$

Како смо узели произвољан модел и произвољну валуацију $\Rightarrow$

$$\models \neg(\forall x)A(x) \longleftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$$

ⓑ $\neg(\exists x)A(x) \longleftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$

Нека је M произвољан модел језика (језика у којем је написана горња ф-ла) и нека је a произвољна валуација тд.

$M \models_a \neg(\exists x)A(x) \iff$ није $M \models_a (\exists x)A(x)$

$\iff$ није да постоји $b \in M$ $M \models_{a(x|b)} A(x)$

$\iff$ за свако $b \in M$ није $M \models_{a(x|b)} A(x)$

$\iff$ за свако $b \in M$ $M \models_{a(x|b)} \neg A(x)$

$\iff$ ~~[illegible]~~ $M \models_a (\forall x)\neg A(x)$

Пошто горе наведено важи у произвољ. моделу онда $\models \neg(\forall x)A(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$

c) $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow (\forall x)Ax \wedge (\forall x)B(x)$

Нека је M произв. модел језика и a произвољна валуација тд.

$M \models_a (\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \iff$

$\forall b \in M$ $M \models_{a(x|b)} A(x) \wedge B(x) \iff$

$\iff \forall b \in M$ $(M \models_{a(x|b)} A(x)$ и $M \models_{a(x|b)} B(x))$

$\iff (\forall b \in M)$ $M \models_{a(x|b)} A(x)$ $(\forall b \in M)$ $M \models_{a(x|b)} B(x)$

$\iff$ $M \models_a (\forall x)A(x)$ и $M \models (\forall x)B(x)$

$\iff \quad M \models_a (\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x)$

Закључујемо

$$\models ((\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x)) \longleftrightarrow ((\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x))$$

Зад Доказати да је следећа фла ваљана

$$\models (\exists y)(\forall x)A(x,y) \to (\forall x)(\exists y)A(x,y)$$

Треба доказати да за сваки модел M и валуацију $a \in M^N$ важи

ако $M \models_a (\exists y)(\forall x)A(x,y)$ онда $M \models_a (\forall x)(\exists y)A(x,y)$

Нека $M \models_a (\exists y)(\forall x)A(x,y) \iff$ тј постоји $c \in M$ $M \models_{a(y|c)} (\forall x)A(x,y) \iff$ постоји $c \in M$ за свако $b \in M$ $M \models_{a(y|c)(x|b)} A(x,y)$

$\implies$ за свако $b \in M$ постоји $c \in M$ $M \models_{a(y|c)(x|b)} A(x,y)$ тј $M \models (\forall x)(\exists y)A(x,y)$

Зад) Доказати

$$\nvDash (\forall x)(\exists y)A(x,y) \longrightarrow (\exists y)(\forall x)A(x,y)$$

Рј) Нађимо модел у коме горња формула није тачна.

домен: $\mathbb{N}$ - скуп природних бројева

$A(x,y)$: " x је мање од y "

Тада $(\forall x)(\exists y)A(x,y)$ значи за сваки природан број x постоји природан број y тд. x мање од y. (тачно)

Док $(\exists y)(\forall x)A(x,y)$ значи да постоји природан број y тд за сваки природан број x важи да је x мање од y. (нетачно)

Према томе горња импликација није тачна у наведеној интерпретацији, тј. формула није ваљана.

Зад Доказати

$$\not\models (\forall x)(A(x) \vee B(x)) \rightarrow ((\forall x) A(x) \vee (\forall x) B(x))$$

$\mathbb{N}$ – домен

$A(x)$: "x је непаран број"

$B(x)$: "x је паран број";

$(\forall x)(A(x) \vee B(x))$ значи

сваки природан број x је паран или непаран (тачно)

$(\forall x) A(x) \vee (\forall x) B(x)$ значи

сваки природан број је непаран или сваки природан број је паран

(нетачно)

Према томе горња импликација није тачна у датој интерпретацији.

(Зад) Доказати да $\models ((\forall x)A \vee (\forall x)B) \to (\forall x)(A \vee B)$.

(Р) Претпоставимо да за $a \in M^{N}$ и модел M важи $M \models_a ((\forall x)A \vee (\forall x)B)$. ⊛ Докажимо $M \models_a (\forall x)(A \vee B)$. Претпоставимо супротно

није $M \models_a (\forall x)(A \vee B)$ $\Leftrightarrow$

није (за свако $b \in M$ $M \models_{a(x|b)} A \vee B$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ није за свако $b \in M$ ($M \models_{a(x|b)} A$ или $M \models_{a(x|b)} B$) $\Leftrightarrow$ постоји $b \in M$ није $M \models_{a(x|b)} A$ и није $M \models_{a(x|b)} B$. Контрадикција са ⊛

Тврђење: Свака инстанца таутологије је логички закон.

Зад. Доказати $\models (\exists x)A \to ((\forall x)B \to (\exists x)A)$

формула је инстанца таутологије $(p \to (q \to p))$

$p: (\exists x)A$ и $q: (\forall x)B$

$\Rightarrow$ фла је логички закон тј фла је ваљана.

Зад. Да ли је ваљана формула

$$((\forall x)F \to (\exists x)F) \leftrightarrow (\neg(\exists x)F \to \neg(\forall x)F)$$

инстанца формуле $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

$p: (\forall x)F$ и $q: (\exists x)F$

$\Rightarrow$ формула је ваљана.

Зад. Доказати да сведена формула није ваљана

$$(\exists x)(A(x) \land B(x)) \leftrightarrow (\exists x)A(x) \land (\exists x)B(x)$$

домен модела — $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, 1, 2)$ - модел

$A(x)$: "$x = 1$"

$B(x)$: "$x = 2$"

Тада наведена формула значи

$(\exists x)(x=1 \wedge x=2) \longleftrightarrow ((\exists x)(x=1) \wedge (\exists x)(x=2))$

а што је нетачно јер $\perp \leftrightarrow \top = \perp$

$\Rightarrow$ није ваљана формула

Зад. Нека су дате формуле

$F_1 \equiv R(y, f(x,a))$ и $F_2 \equiv (\exists y) R(a,y)$

и $M = (\mathbb{N}, \phi)$ $\phi = \begin{pmatrix} a & f & R \\ 1 & + & > \end{pmatrix}$. У

валуацији $(1,3)$ испитати ваљаност датих формула.

Рј $R(y, f(x,a))$

$y > f(x,a)$

$y > x+a \Longrightarrow y > x+1$

валуација $(1,3)$ - односи се на променљиве x, y редом.

$y > x+1$

$3 > 1+1$ Ⓣ $M \models_{(1,3)} F_1$

$(\exists y) R(a,y)$

$(\exists y)\ 1 > y$ ← у скупу $\mathbb{N}$ не постоји број од кога је 1 веће, па ово није тачно

$M \not\models_{(1,3)} F_2$

<u>зад.</u> Нека је $\Theta(x,y)$ предикат који значи "$x+y=0$". Нека је домен скуп реалних бројева, која је од формула важи

(1) $(\exists y)(\forall x)\ \Theta(x,y)$

(2) $(\forall x)(\exists y)\ \Theta(x,y)$

<u>зад.</u> Наћи један модел за сведећу формулу $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))$

Рј Треба наћи домен и интерпр. симбола у којој је горња формула тачна за сваку валуацију.

домен : $\mathbb{R}$

$I(R) = $ "<"

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ ((x<y \wedge y<z) \to (x<z))$

Зад. Наћи модел за формулу

$$(\forall x)\, P(x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to P(y,x)\big) \wedge$$
$$\wedge\, (\forall x)(\forall y)(\forall z)\Big(\big(P(x,y) \wedge P(y,z)\big) \to P(x,z)\Big)$$

Рј. домен – $\mathbb{N}$, $I(P) =$ "$=$"

$P(x,y)$: "$x=y$"

$$(\forall x)\,(x=x) \wedge (\forall x)(\forall y)(x=y \to y=x) \wedge$$
$$\wedge\, (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((x=y \wedge y=z) \to x=z\big)$$

Примјетимо да смо умјесто "$=$" могли узети било коју релацију еквиваленције на $\mathbb{N}$ нпр.

$I(P) = \rho$ гдје је ρ – релација деф. са $x \rho y \Leftrightarrow 2 \mid y-x \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 2)$

⊛ x није слободна у B $\quad M \models_a B \Leftrightarrow M \models_{a(x/b)} B$

вриједности ф-ле не зависи од везаних пром., него од слободних

Зад. Нека је x промјенљива која није[1] слободна у B. Тада

$$\models ((\forall x)A \vee B) \longleftrightarrow (\forall x)(A \vee B)$$

Рј Нека је M - модел и $a \in M^N$ - валуац. и $M \models_a (\forall x)(A \vee B)$ акко за свако $b \in M$

$M \models_{a(x|b)} A \vee B$ акко за свако $b \in M$ ($M \models_{a(x|b)} A$ или $M \models_{a(x|b)} B$) акко

$\boxed{x \text{ није слободна у } B \quad M \models_a B \Leftrightarrow M \models_{a(x|b)} B}$

акко за свако $b \in M$ ($M \models_{a(x|b)} A$ или $M \models_a B$) акко за свако $b \in M$ $M \models_{a(x|b)} A$ или $M \models_a B$ акко $M \models_a (\forall x A) \vee B$

Зад. Ако x није слободна у B, тада $\models$ $((\exists x)A \to B) \longleftrightarrow ((\forall x)(A \to B))$.

Рј M модел, $a \in M^N$ валуација тд

$M \models_a (\exists x)A \to B \stackrel{*}{\Longleftrightarrow}$

$\boxed{(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B) \;\; (*)}$

$\Longleftrightarrow M \models_a \neg(\exists x)A \vee B$

$\Longleftrightarrow M \models_a (\forall x)\neg A \vee B \Longleftrightarrow$ [x није слободна у B

(2)

(+) користимо претходни задатак $\iff M \models_a (\forall x)(\neg A \vee B) \iff$

$\iff M \models_a (\forall x)(A \to B)$

Зад. Ако су A, B, C формуле и x промј. која није слободна у B. Тада

$$\models (\exists x)(A \wedge (B \to C)) \longrightarrow ((\forall x)(A \to \neg C) \to \neg B)$$

Рј. Претпоставимо да постоји модел M и $a \in M^{\mathbb{N}}$ - валуација тд.

$M \models_a (\exists x)(A \wedge (B \to C))$ и није да $M \models_a (\forall x)(A \to \neg C) \to \neg B$

$M \models_a (\exists x)(A \wedge (B \to C))$ (1) и $M \models_a (\forall x)(A \to \neg C)$ (2) и није $M \models_a \neg B$ (3)

Из (1) постоји $b \in M$ ($M \models_{a(x|b)} A$ и $M \models_{a(x|b)} B \to C$)

Из (2) за свако $b \in M$ ($M \models_{a(x|b)} (A \to \neg C)$) ★

За $b \in M$ за које је $M \models_{a(x|b)} A$ важиће и ★ (за то b јер важи за било које b) $\Rightarrow M \models_{a(x|b)} \neg C$.

Такође за такво b $M \models_{a(x|b)} B \to C$ па мора бити да није $M \models_{a(x|b)} B$.

тј $M \models_{a/x|b)} \neg B \iff M \models_a \neg B$
$\begin{pmatrix} x \text{ није} \\ \text{слободна у } B \end{pmatrix}$

Контрадикција са (3).

<u>зад</u>. Доказати да је формула $(\forall x) A(x) \longrightarrow A(t)$ ваљана, гдје је t -терм слободан за x у $A(x)$.

Рј

ТВРЂ. t слободан за x у A тада

$$M \models_a A(x|t) \iff M \models_{a(x|[t]^M_a)} A$$

Нека је M - модел, $a \in M^N$ - валуација тј $M \models_a (\forall x) A(x)$ тј. ~~[illegible]~~

за свако $b \in M$ $\quad M \models_{a(x|b)} A(x)$

Како претходно важи за свако $b \in M$ важи и за $b = [t]^M_a \in M$

$$M \models_{a(x|[t]^M_a)} A \overset{\text{ТВРЂ}}{\iff} M \models_a \underset{\substack{\parallel \\ A(t)}}{A(x|t)}$$

Формални приступ у ПЛ ①

- инстанце аксиома исказне логике
- t - слободан за променљиву x у A

$\forall x A \to A(x|t)$ (B1) - аксиома универ. квантификат.

$A(x|t) \to \exists x A$ (B2) - аксиоми егзист. квантиф.

- аксиоме једнакости

$E_1: \quad \forall x \ (x=x)$

$E_2: \quad \forall x \forall y \ (x=y \to y=x)$

$E_3: \quad \forall x \forall y \forall z \ ((x=y \land y=z) \to x=z)$

$E_4: \quad \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \ (x_1=y_1 \land \ldots \land x_n=y_n) \to (f(x_1,\ldots,x_n) = f(y_1,\ldots,y_n))$

$E_5: \quad \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \ (x_1=y_1 \land \ldots \land x_n=y_n) \to (r(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow r(y_1,\ldots,y_n))$

Правила извођења:

МП: $\dfrac{A, A \to B}{B}$

Правило универзалног квантификатора (x није слободно у A) $\qquad \dfrac{A \to B}{A \to \forall x B}$

правило
егзист.
квантификатора
(x није слободно
у фли B)

$$\frac{A \to B}{\exists x A \to B}$$

правило
генерализације

$$\frac{A}{\forall x A}$$

B - ~~[illegible]~~

зад 1 Доказати

$$(\forall x)(A \to B),\ \forall x A \vdash \forall x B$$

1. $(\forall x)(A \to B)$ прет.
2. $\forall x A$ прет.
3. $\forall x A \to A$ (B1) $\vdash \forall x A \to A(x|t)$

   $t = x$ x је слободно за само себе у фли A

4. A мп 2 3
5. $\forall x(A \to B) \to (A \to B)$ (B1)
6. $A \to B$ мп. 1 5
7. B мп. 4 6
8. $\forall x B$ правило генер. за 7

③

<u>Зад</u> За сваку формулу А важе Де Морганови закони

$$\vdash \exists x A \leftrightarrow \neg \forall x \neg A$$

$$\vdash \forall x A \leftrightarrow \neg \exists x \neg A$$

Рј Доказујемо прво $\exists x A \to \neg \forall x \neg A$

① $\forall x \neg A \to \neg A$ аксиома универз. квант.

② $\neg\neg A \to \neg \forall x \neg A$ (слаба контрапозиција за ① $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$)

③ $A \to \neg\neg A$ (слаба двојна негација

④ $A \to \neg \forall x \neg A$ ~~дедукција~~ транзитивност импликације ② и ③

⑤ $\exists x A \to \neg \forall x \neg A$ правило егзист. квант. (x није слободно у $\neg \forall x \neg A$

Тиме смо доказали $\vdash \exists x A \to \neg \forall x \neg A$.
Тврђење $\vdash \forall x A \to \neg \exists x \neg A$ добијамо контрапозицијом претходног стављајући $\neg A$ умјесто А.

Докажимо сада $\vdash \neg \exists x \neg A \to \forall x A$

① $\neg A \to \exists x \neg A$ аксиома егз. квант. (x слободна за самусеб

② $\neg \exists x \neg A \to \neg\neg A$ (слаба контрапозиција)

③ $\neg\neg A \to A$ (јака двојна негација)

④ $\neg \exists x \neg A \to A$ транзитивност импликације ③ ④

⑤ $\neg \exists x \neg A \to \forall x A$ правило универзалне квант. испуњен услов (x није слободан у $\neg \exists x \neg A$)

Тврђење ~~$\neg\exists x \neg A$~~ $\vdash \neg \forall x \neg A \to \exists x A$ контрапозицијом из претходног добијамо случај $A = \neg A$.

<u>Зад.</u> A, B произвољне формуле у пред. рачуну важе правила

$$\frac{A \to B}{\forall x A \to \forall x B} \; \text{I} \qquad \text{и} \qquad \frac{A \to B}{\exists x A \to \exists x B}$$

① $A \to B$ прет.

② $\forall x A \to A$ аксиома унив. квант.

③ $\forall x A \to B$ транз. ① и ②

④ $\forall x A \to \forall x B$ правило ~~егзист.~~ универ. квант. (x није слободно у $\forall x A$)

Овим смо доказали I

Докажимо сада II

1. $A \to B$ претпост.
2. $B \to \exists x B$ аксиома егзист. кван.
3. $A \to \exists x B$ транзит. 1 2
4. $\exists x A \to \exists x B$ правило егзистенцијалног квантификатора (x није слободно у $\exists x B$)

Зад. Доказати

$$(\forall x)(A \to B), \exists x A \vdash \exists x B$$

1. $(\forall x)(A \to B)$ прет
2. $\exists x A$ прет.
3. $\forall x (A \to B) \to (A \to B)$ [аксиома универз. квантификатора x слободно за само себе]
4. $A \to B$ мп 1 3
5. $B \to \exists x B$ [аксиома егзист. квантиф. x слободно за само себе]
6. $A \to \exists x B$ (транзитивности импликације 4 и 5
7. $\exists x A \to \exists x B$ правило егзист. квант.
8. $\exists x B$ мп 2 7 (x није слободно у $\exists x B$)

Зад. $(\forall x A \wedge \forall x B) \vdash (\forall x)(A(x) \wedge B(x))$

1 $\forall x A \wedge \forall x B$ прет.

2 $(\forall x A \wedge \forall x B) \to \forall x A(x)$ аксиома конјункције

3 $(\forall x A \vee \forall x B) \to \forall x B$ —||—

4 $\forall x A$ мп 1 2

5 $\forall x B$ мп 1 3

6 $\forall x A \to A$ аксиома универ. квант.

7 $\forall x B \to B$ —||—

8 A мп. 4 6 9 B мп 5 7

10 $A \wedge B$ помоћу аксиоме конјункције (наћисати међукораке)

11 $(\forall x)(A \wedge B)$ генерализација за 10

За домаћи

$\vdash (\exists x A \vee \exists x B) \to \exists x (A \vee B)$